EXERCICES

Exercice 1 :

Calculer l'intégrale A dans chacun des cas suivants :

$1°/\ A = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^3}}\,dx$ $\quad 2°/\ A = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt$

$3°/\ A = \int_{-1}^0 \frac{2t}{(t^2+1)^3}\,dt$ $\quad 4°/\ A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$

$5°/\ A = \int_0^2 (1-|x-1|^3)\,dx$ $\quad 6°/\ A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin^4 x\,dx$

$7°/\ A = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \cos^3 x\,dx$ $\quad 8°/\ A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos^3 x + \sin^3 x)\,dx$

Exercice 2 :

Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$; $x \mapsto 1+tgx$.

1°/a) Montrer que f est une bijection.

b) Soit $g = f^{-1}$. Prouver que g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R}$,

$g'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$

2°/ Soit l'intégrale $\mathbf{I} = \int_1^2 \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$.

a) Vérifier que $\mathbf{I} = g(2) - g(1)$.

b) En déduire que $\mathbf{I} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $U_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$.

1°/ Montrer que (U_n) est une suite décroissante, minorée par 0.

2°/ Soit n un entier non nul.

a) Montrer que la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$: $x \mapsto x^n\sqrt{1-x}$ admet un maximum relatif que l'on précisera.